NOTE SUR LES INVARIANTS DES POLYNÔMES ENTIERS;

Par M. C.-A. Laisant, à Paris.

Adunanza del 12 agosto 1894.

Invariant d'une fonction entière de x. — Invariants dérivés.

1. Les notions sur lesquelles je me propose d'insister ici n'ont rien en soi de véritablement nouveau. Elles se rattachent étroitement à la théorie des invariants et des péninvariants des formes binaires, étudiées par de nombreux auteurs. Mais il me semble possible de donner à l'examen de quelques une des propriétés des fonctions dont il s'agit un caractère plus élémentaire; et je crois en outre que la forme sous laquelle j'ai rencontré l'expression de ces fonctions n'a peut être pas été remarquée encore.

Voici, dans tous les cas, le théorème fondamental qui sert de base et de définition à la théorie dont il s'agit :

Soit $f(x)$ un polynôme entier à une seule variable x et de degré n; désignons par $f'(x)$, $f''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ ses dérivées successives, dont la dernière est constante. Le déterminant

$$(\Delta)\quad \begin{vmatrix} nf(x) & f'(x) & f''(x) & \dots & f^{(n-2)}(x) & f^{(n-1)}(x) \\ (n-1)f'(x) & f''(x) & f'''(x) & \dots & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) \\ (n-2)f''(x) & f'''(x) & f^{\mathrm{IV}}(x) & \dots & f^{(n)}(x) & 0 \\ (n-3)f'''(x) & f^{\mathrm{IV}}(x) & f^{\mathrm{V}}(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2f^{(n-2)}(x) & f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) & \dots & 0 & 0 \\ f^{(n-1)}(x) & f^{(n)}(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

a toujours une valeur constante, quel que soit x.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que la proposition est pour ainsi dire évidente en ce qui concerne un trinôme $ax^2 + bx + c$ du 2^e degré, car on a

$$2(ax^2 + bx + c).\,2a - (2ax + b)^2 = 4ac - b^2.$$

Supposons la proposition établie pour les polynômes de degrés $3, 4, \ldots n - 1$, et plus particulièrement pour la dérivée $f'(x)$ du polynôme considéré. Soit K' la constante à laquelle le déterminant correspondant se trouve être égal, et, appelant $u(x)$ le déterminant (Δ) indiqué dans l'énoncé, formons la dérivée $u'(x)$. Il faut pour cela, dans le déterminant, remplacer successivement les termes de chacune des colonnes par leurs dérivées, et ajouter les résultats. Or, ces résultats sont nuls lorsqu'il s'agit de la 2^e, de la 3^e, ... de la $(n - 1)^e$ colonne puisque l'on obtient ainsi des déterminants dans lesquels deux colonnes consécutives sont identiques. Par suite (supprimant la lettre x pour abréger l'écriture) nous avons pour u':

$$\begin{vmatrix} nf' & f' & f'' & \ldots & f^{(n-1)} \\ (n-1)f'' & f'' & f''' & \ldots & f^{(n)} \\ (n-2)f''' & f''' & f^{\mathrm{IV}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2f^{(n-1)} & f^{(n-1)} & f^{(n)} & \ldots & 0 \\ f^{(n)} & f^{(n)} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} nf & f' & f'' & \ldots & f^{(n-2)} & f^{(n)} \\ (n-1)f' & f'' & f''' & \ldots & f^{(n-1)} & 0 \\ (n-2)f'' & f''' & f^{\mathrm{IV}} & \ldots & f^{(n)} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2f^{(n-2)} & f^{(n-1)} & f^{(n)} & \ldots & 0 & 0 \\ f^{(n-1)} & f^{(n)} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant, développé suivant les éléments de la dernière colonne, se réduit, d'après la notation adoptée plus haut, à $(-1)^{n-1} f^{(n)} K'$.

Le premier peut s'écrire, en retranchant la 2^{e} colonne de la première,

$$\begin{vmatrix} (n-1)f' & f' & f'' & \ldots & f^{(n-1)} \\ (n-2)f'' & f'' & f''' & \ldots & f^{(n)} \\ (n-3)f''' & f''' & f^{IV} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(n-1)} & f^{(n-1)} & f^{(n)} & \ldots & 0 \\ 0 & f^{(n)} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

et, développé suivant les éléments de la dernière ligne, il se réduit à $(-1)^{n} f^{(n)} K'$. Donc

$$u' = [(-1)^{n-1} + (-1)^{n}] f^{(n)} K' = 0.$$

La fonction u se réduit donc elle-même à une constante K.

C'est cette constante que nous appellerons l'invariant de la fonction entière $f(x)$; et nous désignerons sous le nom d'invariants dérivés les constantes K', K'', ... des dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, ... Il importe seulement de remarquer que cette notion ne s'étend que jusqu'à la derivée $f^{(n-2)}(x)$ qui est du 2^{e} degré, et qu'une fonction du 1er degré n'a plus d'invariant, dans le sens où nous l'entendons ici, les éléments n'étant plus en nombre suffisant pour former le determinant (Δ).

Expression de l'invariant en fonction des coefficients de $f(x)$.

2. Puisque l'invariant (Δ) ne dépend pas de la valeur de x, on peut en particulier supposer $x = 0$. Or le polynôme $f(x)$ étant écrit sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{n!} x^{n} + \frac{a_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{2!} x^{2} + \frac{a_{n-1}}{1} x + a_n,$$

où pour la commodité du calcul nous avons mis en évidence les factorielles correspondantes en dénominateur, on a évidemment

$$f(0) = a_n, \quad f'(0) = a_{n-1}, \quad \ldots f^{(n-1)}(0) = a_1, \quad f^{(n)}(0) = a_0,$$

de sorte que l'invariant K a pour expression

$$\begin{vmatrix} n\,a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a \\ (n-1)\,a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & a_0 \\ (n-2)\,a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & a_0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2\,a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

A la seule inspection de ce déterminant, on reconnait que l'invariant d'un polynôme de degré n est multiplié ou divisé par λ^n, quand on multiplie ou qu'on divise tous les coefficients de ce polynôme par le facteur λ.

Expression de l'invariant au moyen des invariants dérivés.

3. Soit sous la première forme du déterminant Δ, soit sous celle que nous venons d'obtenir, en fonction des coefficients, on constate que les invariants dérivés ne sont autre que les mineurs de Δ obtenus en supprimant à la fois les p premières lignes et les p dernières colonnes. Cette remarque va nous permettre d'obtenir l'invariant $K = \Delta$, au moyen de ces invariants dérivés.

A cet effet, considérons en général le determinant

$$\begin{vmatrix} nf & f' & f'' & \ldots & f^{(p)} \\ pf^{(n-p)} & f^{(n-p-1)} & \ldots & \ldots & f^{(n)} \\ (p-1)f^{(n-p-1)} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(n-1)} & f^{(n)} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = \delta_p$$

obtenu en supprimant un certain nombre des dernières colonnes de Δ, et un nombre égal de lignes à la suite de la première; Δ lui-même, ou K, ne sera autre chose que δ_{n-1}; et en général le développement de δ_p suivant les éléments de la dernière colonne nous donnera

$$(1) \qquad \delta_p = (-1)^p f^{(p)} K^{(n-p)} + (-1)^{p-1} f^{(n)} \delta_{p-1}.$$

Par l'application de cette relation à K d'abord, puis à toutes les valeurs successives δ_{n-2}, δ_{n-3}, ... δ_1, il viendra

$$\begin{aligned}
K &= (-1)^{n-1} f^{(n-1)} K' + (-1)^{n-2} f^{(n)} \delta_{n-2},\\
\delta_{n-2} &= (-1)^{n-2} f^{(n-2)} K'' + (-1)^{n-3} f^{(n)} \delta_{n-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\delta_3 &= (-1)^3 f''' K^{(n-3)} + (-1)^2 f^{(n)} \delta_2,\\
\delta_2 &= (-1)^2 f'' K^{(n-2)} + (-1) f^{(n)} \delta_1,\\
\delta_1 &= (-1) f' . f^{(n-1)} + f^{(n)} . nf.
\end{aligned}$$

En éliminant tous les δ, chose facile, entre ces diverses relations, et posant pour simplifier $f^{(n)} = \varphi$, on trouve, pour n pair,

$$(2) \qquad \begin{aligned} K = &-f^{(n-1)}K' + f^{(n-2)}\varphi K'' + f^{(n-3)}\varphi^2 K''' - f^{(n-4)}\varphi^3 K^{\mathrm{IV}} - \ldots \\ &\ldots \pm f''\varphi^{n-3}K^{(n-2)} \mp f'\varphi^{n-2}f^{(n-1)} \pm nf\varphi^{n-1};\end{aligned}$$

et, pour n impair,

$$(3) \qquad \begin{aligned} K = &+f^{(n-1)}K' + f^{(n-2)}\varphi K'' - f^{(n-3)}\varphi^2 K''' - f^{(n-4)}\varphi^3 K^{\mathrm{IV}} + \ldots \\ &\ldots \pm f''\varphi^{n-3}K^{(n-2)} \mp f'\varphi^{n-2}f^{(n-1)} \pm nf\varphi^{n-1}.\end{aligned}$$

La succession des signes est dans le premier cas

$$- + + - - + + - \ldots$$

et, dans le second,

$$+ + - - + + - - \ldots$$

Le nombre des termes est toujours égal à n.

Ces formules, si on y suppose $x = 0$, ce qui entraîne $f^{(p)} = a_{n-p}$ et $f^{(n)} = \varphi = a_0$, deviennent respectivement

$$(4)\qquad \begin{aligned} K = &- a_1 K' + a_2 a_0 K'' + a_3 a_0^2 K''' - a_4 a_0^3 K^{\mathrm{IV}} - \ldots \\ &\ldots \pm a_{n-2} a_0^{n-3} K^{(n-2)} \mp a_{n-1} a_0^{n-2} a_1 \pm n a_n a_0^{n-1}; \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} K = &+ a_1 K' + a_2 a_0 K'' - a_3 a_0^2 K''' - a_4 a_0^3 K^{\mathrm{IV}} + \ldots \\ &\ldots \pm a_{n-2} a_0^{n-3} K^{(n-2)} \mp a_{n-1} a_0^{n-2} a_1 \pm n a_n a_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Intégration d'une équation différentielle.

4. D'après tout ce qui précède, il est facile, étant donné un polynôme en x de degré n, de calculer son invariant K. Si on l'exprime, par exemple, au moyen des coefficients, comme on l'a vu au n° 2, on aura une certaine relation

$$(6)\qquad F(a_0, a_1, \ldots a_n) = K.$$

Or, si dans le déterminant Δ nous remplaçons partout les f par des y, cette dernière lettre représentant une certaine fonction inconnue de x, on aura

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \cdot\cdot & n y & y' & y'' & \ldots & y^{(n-1)} \\ & (n-1) y' & y'' & y''' & \ldots & y^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 2 y^{(n-2)} & y^{(n-1)} & \ldots & \ldots & 0 \\ & y^{(n-1)} & y^{(n)} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = K.$$

Cette relation est une équation différentielle du n^{e} ordre, d'apparence assez compliquée, surtout si on la développait.

Puisqu'elle est satisfaite par $y = f(x)$ on voit que l'intégrale générale de cette équation (7) est $y = f(x)$, $f(x)$ étant un polynôme arbitraire du n^{e} degré, dont les coefficients $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont assujettis à satisfaire à la condition (6), ce qui laisse bien dans le résultat n constantes arbitraires indépendantes.

Nous croyons devoir borner ici ces indications rapides sur une notion algébrique qui nous semble pouvoir présenter quelque intérêt.

Paris, juillet 1894.

C.-A. LAISANT.